

# KURT GÖDEL

## La matematica presa a ceffoni

*Cent'anni fa nasceva uno dei più grandi logici di tutti i tempi. Il suo «teorema dell'incompletezza» è una delle rivoluzioni culturali del '900*

MARIO SANTAGOSTINI

**K**urt Gödel era nato un secolo fa, il 28 di aprile del 1906 a Brno, in Moravia. Da bambino era curioso e sveglio, tanto da meritarsi il soprannome di «Herr Warum», «il Signor perché». Forse per questo si era laureato in matematica e partecipava alle sedute del circolo di Vienna. Più avanti, già celeberrimo logico e amico di Albert Einstein, dovendo nel dicembre del '47 sostenere un esame sulla costituzione americana per diventare cittadino statunitense, trovò che la stessa costituzione conteneva un errore formale e andava considerata, dunque, illegittima... Più avanti negli anni, sovrappreso da manie, temendo che il frigorifero sprigionasse gas velenosi o che il suo cibo fosse stato avvelenato, rifiutò di mangiare. Quando morì nel 1978, pesava poco più di trentacinque chili.

A soli 25 anni, però, nel 1931 pubblicò il famoso «Teorema di incompletezza» in cui si veniva a dimostrare quella che l'*amateur* del pensiero avvezzo a estensioni indebite può osare definire la prova provatissima che anche nel ragionamento matematico (allo stesso *amateur* spesso assai ostico) alligna qualcosa di strano, imprevedibile. Come nella vita. Supponiamo: sia dato un sistema formalizzato con tanto di assiomi e qualche regola di inferenza. Con esso, ci viene consentito passare deduttivamente da formula a formula. Poi supponiamo che il «dominio» di questo sistema sia la matematica. Ora ci si chiede: esiste un modo attraverso il quale io sono in grado di stabilire, passo dopo

passo, se una qualsiasi proposizione derivata dagli assiomi è vera o falsa? Se sì, la teoria è coerente. Inoltre: esiste un modo per sapere se tutte quelle proposizioni dicono davvero tutto attorno a numeri, calcoli, insiemi? Se sì, la teoria è interpretabile, è completa e la matematica sarà il suo dominio.

Il problema, riassunto colpevolmente in poche righe, era stato affrontato da molte teste validissime a partire dalla fine dell'Ottocento. Tra queste c'era Bertrand Russell.

E anche David Hilbert, il quale s'era proposto di trovare un sistema relativamente scarso con il quale si potesse, in un numero finito e controllabile di operazioni, ricavare via via tutte le «verità», ossia tutti i teoremi matematici. Gödel, di fatto, parte da lì. Considerando la

logica matematica come un gruppo di simboli, regole, stringhe di derivazione e formule, assegna a ognuna di esse un numero chiamato, appunto, «numero di Gödel». E allora accade che la struttura della logica matematica si trova proietta-

ta in un sistema di calcolo, in una sorta di sottostruttura che Gödel, seguendo David Hilbert, chiama metamatematica. Proprio come un metalinguaggio parla, attraverso corrispondenze biunivoche, di un altro linguaggio, così la metamatematica parlerà della matematica.

E dovrà farlo senza tralasciare nulla. Infatti di nulla si scorda: ogni numero di Gödel, se scomposto nei suoi fattori, riproduce esattamente la formula e il percorso che ha portato ad essa. Ora: il momento in-

*Celebrato e spesso frainteso  
come tutti i geni, scovò  
addirittura una illogicità  
nella Costituzione americana*

quietante della (la si chiama proprio così) godelizzazione consiste in ciò: si viene a calcolare un numero a cui corrisponde una formula (la cosiddetta formula G) che afferma testualmente: «No, io non sono un teorema». Di fatto, si è costruita una formula che di se stessa asserisce non essere dimostrabile. Poi, Gödel dimostra che G è dimostrabile se e solo se anche la sua negazione non-G lo è. E allora il sistema non sarebbe più coerente, avendo generato sia una proposizione sia la sua contraria. Ma non è così: dunque ricavo che G è indecidibile, nel senso che né lei né la sua negazione possono essere dedotte dagli assiomi di partenza. Attenzione: G non solo «esiste» in quanto indecidibile, ma è perfino in grado di dirmi «qualcosa» attorno ai numeri. E dunque arrivo alla conclusione radicale: sarà la stessa teoria assiomatica incapace di decidere se accettarla o rifiutarla. È coerente, ma incompleta. Non a caso il teorema di Gödel per antonomasia si chiama «teorema di incompletezza». E prende a ceffoni molte certezze attorno alla fondazione della matematica.

Tentiamo, a questo punto, di aumentare i nostri assiomi. Anzi, raggiungiamoci proprio la formulaccia G. Non è cambiato, secondo Gödel, nulla: mi ritrovo solo un sistema più potente nel quale, tuttavia, incoccherò sempre e comunque nell'indecidibile. Un sistema, dunque, non può ricavare da sé nessun sottosistema in grado di descriverlo con esaustivamente. Dunque, la matematica non potrà mai affermare di se stessa: «io sono coerente». Insomma, come sosteneva Hermann Weyl: «Dio esiste poiché la matematica è coerente, e il diavolo esiste dato che non possiamo dimostrare la sua coerenza». Il logico ferrato si sarebbe già fermato qui, sostenendo che non siamo affatto in presenza di limiti del pensiero umano ma soltanto d'una caratteristica regionale, d'un inghippo disciplinare. L'amateur potrà, al contra-

rio, pensare e speculare attorno alle conclusioni di Gödel (certamente non provvisorie, visto che sono state ridimostrate con maggiore eleganza) usando una libertà che le prove di incompletezza non censurano, anzi esaltano. E produrre esempi.

Eccone uno noto agli esperti e uno (credo) inedito: se io costruisco una macchina che mi fabbrica gelati a partire dalle ricette che ci inserisco, e supposto che io ci infili tutte le ricette possibili, prima o poi uscirà un gelato non prefigurato da nessuna ricetta. Il gelato indecidibile. Oppure: se io costruisco un'altra, più nobile macchina con le istruzioni per scrivere tutti gli infiniti nomi di Dio, prima o poi uscirà un nome che è un nome di Dio e non è un nome di Dio: il nome di Dio indecidibile. E resterà la domanda: ma a chi appartiene quel nome di Dio?



«SIGNOR PERCHÉ»  
Kurt Gödel  
(1906-1978)  
visto da Dariush  
Radpour.  
Matematico  
e logico, nacque  
a Brno (oggi nella  
Repubblica Ceca),  
divenne cittadino  
austriaco a 23 anni  
e, in seguito,  
cittadino degli Usa  
a 42 anni.  
Amico di Einstein,  
Gödel è ritenuto  
uno dei tre più  
grandi logici  
di tutti i tempi  
assieme a Gottlob  
Frege e Aristotele

## IL CONVEGNO

### La complessità di un maestro unico

In occasione del centenario della nascita di Kurt Gödel (1906-1978), l'Università di Torino ospita dal 26 al 28 aprile il convegno «La complessità di Gödel» organizzato da Gabriele Lolli e Ugo Pagallo per ricordare la figura del grande logico e per fare il punto sugli sviluppi recenti derivati dal suo lavoro, in particolare la teoria dell'informazione e quella della complessità computazionale. Per quanto riguarda invece l'editoria, da segnalare quest'anno la ristampa del libro di Piergiorgio Odifreddi di *Il diavolo in cattedra. La logica da Aristotele a Gödel* (Einaudi) e l'uscita del saggio *Incompletezza. La dimostrazione e il paradosso di Kurt Gödel* di Rebecca Goldstein (Codice). Lo scorso anno sono stati pubblicati invece *Le prove logiche dell'esistenza di Dio da Anselmo d'Aosta a Kurt Gödel. Storia critica dell'argomento ontologico* di Roberto G. Timossi (Marietti) e *Scienza, imposture e abbagli. Discorsi su Gödel, esagrammi magici, Cappuccetto Rosso e altri temi matematici e pseudoscientifici di Martin Gardner* (Hoepli). Da segnalare infine, soprattutto, l'imminente uscita del terzo volume delle *Opere* di Kurt Gödel da parte di Bollati Boringhieri (nel 2002 uscì il volume secondo dedicato agli scritti dal 1938 al 1974; e nel 1999 il primo volume oper gli scritti dal 1929 al 1936).