

CHE COS'È LA MATEMATICA

OVVERO PERCHÉ LA MATEMATICA PUÒ PIACERE

di Marco Bramanti*

La matematica è una scienza? È una filosofia? O cos'altro? Quali sono le caratteristiche del sapere matematico, sia nella forma «statica» di insieme di conoscenze strutturate come sistema ipotetico deduttivo, sia nella forma «dinamica» di ricerca di nuovi risultati? L'autore cerca di cogliere alcuni elementi per rispondere anche a un'altra questione, che non pochi si pongono: perché ad alcuni la matematica piace?

*Associato di Analisi Matematica presso il Politecnico di Milano.

Desidero riflettere sul tema della matematica come conoscenza, su come e perché la matematica possa essere interessante in se stessa in quanto oggetto di studio e di ricerca, a prescindere dalla sua utilità o dalle sue applicazioni. Cercando di individuare alcuni motivi «oggettivi» per cui la matematica possa essere interessante, mi sono accorto che la riflessione sconfinava continuamente su considerazioni soggettive e su criteri di gusto personale. Da una parte questo può essere comune a qualsiasi disciplina: se si chiede a una persona che per mestiere studia un certo argomento perché lo fa, probabilmente risponderà «perché mi piace». D'altro canto credo che i matematici siano più sensibili di altre categorie di persone al criterio estetico nel loro lavoro. Perciò ho rinunciato, almeno in parte, a enunciare motivi oggettivi per cui la matematica è interessante, individuando piuttosto alcune caratteristiche della matematica per cui «a me piace». Al tempo stesso, credo che questi miei criteri di giudizio siano abbastanza condivisi, di fatto, tra le persone che si occupano di matematica con gusto. Perciò, penso di poter proporre queste considerazioni non solo come testimonianza personale, né come tentativo di convincere qualcuno che la matematica deve piacergli; piuttosto, come resoconto di alcuni degli elementi di interesse e fascino per cui a molti la matematica piace. Per iniziare la riflessione è opportuno sgombrare il campo da alcuni possibili equivoci.

La matematica è una scienza?

Almeno in senso stretto bisogna rispondere di no. La scienza moderna nasce nel Seicento, la scienza matura è quella di

Galileo, e soprattutto quella di Newton; prima è solo un insieme di tentativi frammentari. La matematica invece è andata emergendo e maturando, come sapere organizzato e strutturato in modo ipotetico-deduttivo (assiomi, definizioni, teoremi, eccetera) in quei trecento anni che vanno da Talete a Euclide, dal VI al III secolo a.C., lo stesso periodo in cui è fiorito il grande pensiero filosofico greco. Certamente quando vengono scritti gli *Elementi* di Euclide, intorno al 300 a.C., la matematica è già «matura». Se la matematica è già matura quasi 2 000 anni prima che lo sia la scienza, certamente è qualcosa di diverso dalla scienza.

A giudicare dalle sue origini, la matematica sembra quindi un'attività legata alla razionalità umana nel suo aspetto più profondo, ma non strettamente e necessariamente orientata all'indagine sul mondo fisico e sulle sue leggi. Allora la matematica non c'entra con la scienza? C'entra, almeno in due sensi.

Da quando la scienza è nata, la matematica ha avuto uno sviluppo impressionante, un'esplosione di ricerche e di progressi inimmaginabili prima; la scienza infatti ha fornito alla matematica problemi, stimoli, motivazioni, applicazioni e anche strumenti per la ricerca (per esempio i computer), senza con ciò esaurire tutti i problemi, tutte le motivazioni, tutti gli stimoli della ricerca matematica.

In secondo luogo, la scienza moderna nasce come scienza matematizzata: Newton ha dovuto inventare il calcolo infinitesimale per poter fare la sua meccanica; la sua opera fondamentale infatti si intitola *I principi matematici della filosofia naturale*. La scienza moderna «parla» col linguaggio matematico e senza di esso è semplicemente muta. Quello che la scienza dice è suggerito dalle indagini scientifiche, non matematiche, ma senza matematica non si potrebbe formulare nessuna legge fisica e nessuna teoria; si potrebbe al massimo fare il resoconto di osservazioni isolate.

Galileo si spinse ad affermare che la scienza parla il linguaggio matematico perché il libro della natura è scritto in linguaggio matematico. Anche Richard Feynman, premio Nobel per la fisica, scrive: «La cosa strana della fisica è che anche per formulare le leggi fondamentali abbiamo bisogno della matematica.

[...] Più investighiamo, più leggi troviamo, più profondamente penetriamo la natura, più la malattia persiste: ognuna delle nostre leggi è un'affermazione puramente matematica. [...] Voi mi potreste dire: "Perché non dirla a parole invece che a simboli? La matematica è solo un linguaggio, e noi vogliamo poterlo tradurre". [...] Ma io non credo che sia possibile, perché la matematica non è semplicemente un'altra lingua. La matematica è un linguaggio più il ragionamento; un linguaggio più la logica, cioè uno



Isaac Newton
(1642-1727)

Richard Feynman
(1918-1988)



strumento per ragionare. In effetti è una grande raccolta dei risultati dell'attento ragionamento di varie persone. Per mezzo di essa è possibile collegare un'affermazione a un'altra.»¹

In sintesi, la matematica ha reso possibile il nascere della scienza moderna e la scienza moderna, a sua volta, ha causato il «boom» della matematica; la matematica è legata e intrecciata alla scienza, ma ben distinta da essa.

La matematica è filosofia?

Certamente no. Anche se nella storia ci sono esempi eclatanti di grandi matematici che erano grandi filosofi (Talete, Cartesio, Leibniz, eccetera) direi che a nessuno viene la tentazione di affermare che la matematica sia filosofia. Per esempio, Cartesio nel 1637 scrive il suo *Discorso sul metodo*, e in appendice c'è la sua *Geometria*: l'invenzione della geometria analitica, svolta epocale nella storia della matematica, è pubblicata in appendice a un testo filosofico altrettanto fondamentale per la storia della filosofia! Ma le due cose sono solo giustapposte, in realtà non hanno molto in comune. Il metodo dimostrativo della matematica è lontanissimo dal metodo argomentativo della filosofia, e lo si riconosce dai frutti: un teorema dimostrato da Cartesio è riconosciuto vero anche oggi, da tutti i matematici, mentre nessuna tesi importante di un grande filosofo di ieri vede «tutti» d'accordo oggi: in filosofia ci sono sempre i *fan* e gli oppositori, finché c'è vita c'è dibattito.

Lo spirito di Euclide



Euclide
(IV-III sec. a.C.)

Che cos'è dunque la matematica? Consideriamo un esempio che in parte non fa che riporre questa domanda, in parte suggerisce già qualche spunto di risposta.

Euclide duemilatrecento anni fa scrive: «Teorema. *Esistono infiniti numeri primi.* Dimostrazione. *Supponiamo per assurdo che ce ne siano solo un numero finito, e pensiamo di elencarli tutti. Allora, a partire da questo elenco, con un certo procedimento [...] si costruisce un nuovo numero che si dimostra essere primo e che d'altra parte è più grande di tutti i numeri primi dell'elenco. Assurdo, perché allora vuol dire che l'elenco non era completo. Così il teorema è dimostrato.»*

In un'epoca in cui nessuna applicazione pratica dei numeri primi era conosciuta, perché a Euclide interessavano?²

In un'epoca in cui non esisteva alcuno strumento per eseguire calcoli con numeri «grandi» (computer, calcolatrici, regoli, eccetera), in cui la stessa scrittura dei numeri, che non si basava ancora sul sistema posizionale, era inadatta a fare somme e prodotti con carta e penna e la maggior parte delle persone non era in grado di fare cal-

coli precisi con numeri elevati, perché preoccuparsi di queste cose? Riflettiamo sulla profondità di questi pensieri di Euclide: chiedersi quanti sono i numeri primi; concepire l'infinità dei numeri primi. Pensare che la propria mente, che non saprebbe elencarne più di qualche centinaio, possa dimostrare rigorosamente che in realtà ce ne sono infiniti. Pensare che un ragionamento di pochi passaggi possa stabilire per sempre, e oltre ogni ragionevole dubbio, ciò che una vita intera non basterebbe a verificare empiricamente.

Se cogliamo il fascino di questa ricerca, iniziamo a capire che cos'è la matematica, qual è la molla che rende questo tipo di conoscenza affascinante per certe persone. Non per niente Einstein scrisse: «Se Euclide non è riuscito ad accendere il vostro entusiasmo giovanile, non siete nati per essere un pensatore scientifico». Prima ho affermato che la matematica non è una scienza, ma ciò non toglie che agli scienziati teorici, com'era Einstein, solitamente la matematica piace.

Il sapere matematico consiste di verità necessarie

Consideriamo la categoria del «necessario» contrapposta a quella del «contingente». Contingente è ciò che «c'è ma potrebbe non esserci»; necessario è ciò che «c'è perché non potrebbe non esserci».

Passando dal piano dell'essere a quello del conoscere, che qui interessa, l'affermazione «oggi c'è il sole» è una verità contingente (è vero, ma avrebbe potuto essere falso), mentre il teorema di Pitagora è una verità necessaria (è vero e non potrebbe essere altrimenti).

La matematica si occupa di verità necessarie. Questo certamente risponde a un'esigenza sempre sentita dalla ragione dell'uomo: nel mare delle realtà contingenti, individuare qualcosa che sia necessario, dei punti fermi.

Una verità necessaria è *a priori* rispetto a qualsiasi tipo di osservazione della realtà fisica. Questa è una profonda differenza tra sapere matematico e sapere scientifico. Si può anche dire che la matematica, cogliendo il perché dei nessi necessari tra le proprietà degli oggetti, delimita lo spazio del possibile, mentre l'osservazione scientifica cerca di cogliere qual è la scelta contingente che la natura fa tra gli infiniti mondi possibili. Sono due atteggiamenti complementari, non contrapposti.

Essendo le leggi fisiche formulate con linguaggio matematico, la matematica individua le «leggi delle leggi di natura», dettando proprietà che necessariamente devono essere possedute dai concetti scientifici introdotti.

Una verità necessaria è «stabile», non diventerà falsa domani, e da essa possiamo partire per nuove indagini. Infatti la matematica è un sapere che avanza nel tempo in modo irreversibile; quel che studiamo in matematica non sarà mai del tutto superato e questo ci fa sentire ripagati dello sforzo di apprendere.

¹R. Feynman, *La legge fisica*, Boringhieri, Torino 1971, pp. 43-44.

²Oggi, grazie ai numeri primi, possiamo fare *shopping online* pagando con la carta di credito: il numero di carta di credito è trasmesso in codice cifrato, per sicurezza, e tutti i codici si basano sulle proprietà dei numeri primi.

La dimostrazione come spiegazione di un perché



Gottlob Frege
(1848-1925)

La necessità di cui parliamo è necessità logica, e la logica procede per catene deduttive. Quindi la verità di un teorema è svelata dal «filo» della sua dimostrazione. La matematica è questo intreccio di fili, alcuni brevi altri lunghissimi, che la percorrono in ogni senso, gettando nessi tra oggetti vicini e lontani. Le relazioni esistenti tra oggetti ci spiegano il perché di certe verità. Gottlob Frege, matematico e filosofo di fine Ottocento, scrive nel 1874: «È certo che formule numeriche come $5 + 7 = 12$ e leggi come quella associativa per l'addizione hanno così innumerevoli conferme in infinite applicazioni giornaliere che può sembrare quasi ridicolo levare qualche dubbio su di esse coll'esigerne una dimostrazione. Ma è nella natura stessa della matematica che dovunque sia possibile una dimostrazione la si ritenga preferibile a una semplice verifica induttiva. In realtà il processo dimostrativo non ha esclusivamente lo scopo di elevare al di sopra di qualsiasi dubbio la verità dei singoli teoremi, ma anche di farci comprendere la dipendenza di queste verità le une dalle altre. Una volta convinti dell'immobilità di una roccia per aver tentato invano di spostarla ci si può chiedere, inoltre, che cosa la sostenga con tanta saldezza.»³ Il matematico non è uno scettico, che ha bisogno di dimostrare anche le cose più evidenti per poterci credere; piuttosto, è una persona che non si accontenta di «registrare» che certe cose stanno in un certo modo, ma vuole capirne il perché profondo. In particolare vuole svelare se e in che senso le cose stanno così «perché non potrebbe essere diversamente». Lo studio della matematica, o la ricerca matematica, sono percorse dal desiderio di «svelare la trama del disegno» cogliendo nessi tra le cose.

Universalità e astrazione

Strettamente legato al carattere di necessità delle affermazioni matematiche, sta il carattere della universalità.

Il 90% dei teoremi matematici ha la struttura logica dell'implicazione universale, ossia: *Per ogni oggetto x del tal tipo, se vale questa proprietà, allora vale anche quest'altra.*

Per esempio, il Teorema di Pitagora dice che *In ogni triangolo, se un angolo è retto allora il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati dei cateti.*

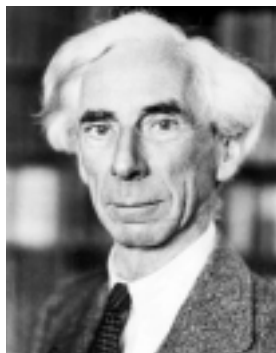
Per questa struttura tipica diciamo che una teoria matematica è un sistema ipotetico-deduttivo. Un solo teorema, quindi, contiene in sé infinite affermazioni vere, che riguardano gli infiniti oggetti di un certo tipo, che già conosco e che potrei conoscere domani. Si parla di «tutti» gli oggetti che soddisfano certe ipotesi: questa è l'universalità.

L'universalità dei teoremi è resa possibile dall'astrazione. Una classe di infiniti oggetti (per esempio i triangoli rettangoli) non può essere individuata elencandone gli elementi (questo triangolo, e poi quest'altro, e poi

quest'altro ancora): non si finirebbe mai. È individuata, invece, specificandone le «proprietà caratteristiche», per esempio essere un poligono di tre lati e avere un angolo retto. Quando si dimostra il teorema di Pitagora, ogni affermazione fatta dovrà essere vera per qualsiasi triangolo rettangolo.

Bertrand Russell, ne *I principi della matematica*⁴, scrive che il concetto più caratteristico della matematica è quello di variabile, e il concetto di variabile richiede per la sua definizione il concetto indefinibile di «qualsiasi». La parola qualsiasi quindi è cruciale in matematica.

Nella mentalità corrente, la parola «astratto» ha una connotazione negativa: negazione di ciò che è concreto, reale, vivo. Ma «astrarre» vuol dire cogliere ciò che c'è di comune in varie esperienze concrete; l'astrazione è quindi un modo di leggere la concretezza cercando qualcosa di unitario nel molteplice. Le proprietà vere per qualsiasi triangolo, che sono le uniche che si devono usare se si vuole dimostrare qualcosa che valga per tutti i triangoli, sono ottenute con un procedimento di astrazione, stabilendo cosa c'è di comune tra i triangoli. Perciò «triangolo» è un concetto astratto. La matematica,



Bertrand Russell (1872-1970)

parlando per concetti astratti, riesce a fare infinite affermazioni con un numero finito di parole. Non è affascinante questo?

Si cita spesso la frase romantica di Goethe: «Grigia è la teoria, verde l'albero della vita». Io dico: grigia è la teoria, per chi non la capisce. Un bravo matematico parla degli oggetti più astratti come se li vedesse; e in effetti li vede, perché li capisce (etimologicamente «teoria» vuol dire «visione»).

³Da *I fondamenti dell'aritmetica*, in: C. Mangione (a cura di), *Frege: Logica e aritmetica*, Boringhieri, Torino 1977, p. 222.

⁴Cfr.: B. Russell, *I principi della matematica*, Tascabili economici Newton, Roma, 1989, cap. 8.

Primo punto di sintesi: la matematica «statica»

- ❑ La natura del sapere matematico è stabilire le relazioni necessarie, i nessi logici, tra le proprietà degli oggetti. Non basta un insieme di affermazioni vere ma slegate tra loro, si cerca un «disegno» che colleghi certe verità ad altre.
- ❑ Ciò che è logicamente necessario non è una proprietà ma il nesso, l'implicazione fra due proprietà. Perciò la matematica è un sapere ipotetico-deduttivo: *se ... allora*.
- ❑ Essendo logicamente necessarie, le verità matematiche sono *a priori* rispetto all'osservazione della realtà fisica, e stabili nel tempo. Apprendere un sapere di questo tipo è quindi un buon investimento.
- ❑ La forma tipica del teorema è: *Qualsiasi oggetto abbia questa proprietà, ha anche quest'altra*. L'universalità del teorema, espressa nella parola «qualsiasi», è resa possibile dalla natura «astratta» dei concetti e degli oggetti matematici. Dire che un oggetto è astratto vuol dire che non è definito nella sua individualità, ma è definito mediante le sue «proprietà caratteristiche». L'attitudine ad astrarre è legata al desiderio della nostra mente di cogliere che cosa c'è di più profondamente in comune tra molteplici oggetti di un certo tipo.

L'aspetto dinamico della matematica

Abbiamo sottolineato alcuni aspetti della matematica che si ritrovano già nella matematica «statica», ossia la matematica come sapere necessario, stabile, universale, astratto e la dimostrazione come ricerca di nessi e di spiegazione. Ci spostiamo ora su qualcosa che ha a che fare con la pratica matematica, ossia la ricerca, che in un certo senso è l'aspetto dinamico della matematica.

«Non è la conoscenza, ma l'atto di apprendere, non il possesso ma l'atto di arrivarci, che garantisce il più grande piacere. Quando io ho chiarificato ed esaurito un argomento, volto le spalle a questo, per entrare di nuovo nell'oscurità; l'uomo perennemente insoddisfatto è strano: se ha finito di costruire una struttura non è per abitarci in pace, ma per cominciarne un'altra. Immagino che il conquistatore del mondo si debba sentire così: dopo che un regno è stato conquistato a fatica, imbraccia le armi per conquistarne un altro.»⁵



Karl Friedrich Gauss
(1777-1855)

Congetture, pregiudizi, feeling

Supponiamo che io stia riflettendo su certi oggetti matematici, e mi venga l'idea che possa essere vero un certo teorema, della forma: *Per ogni oggetto x del tal tipo, se vale questa proprietà allora vale anche quest'altra.*

Si dice che sto facendo una «congettura».

Una congettura è un enunciato preciso, come quello di un teorema, che però non è ancora un teorema perché nessuno l'ha dimostrato. A rigore, quindi, non si sa ancora se sia vero o falso. Come faccio a decidere se è vero o falso?

Se voglio provare che è vero, dovrò dimostrare che preso un qualsiasi oggetto x del tal tipo, per il quale vale la tal proprietà, vale anche la tal altra proprietà. Devo fare una dimostrazione, usando argomenti validi per «qualsiasi x del tal tipo». Ma se non riesco a dimostrare il teorema, non posso certo concludere che è falso! Il teorema potrebbe essere vero, e io non abbastanza bravo da dimostrarlo. Ma supponiamo che invece io trovi un esempio specifico di un certo x che soddisfa l'ipotesi ma non la tesi del teorema; allora il teorema è falso: la sua pretesa di universalità crolla di fronte a un solo «contresempio». La regola crolla di fronte all'eccezione. Dunque se voglio dimostrare che la congettura è falsa, cercherò un contresempio, ma se non lo trovo non posso concludere che il teorema è vero.

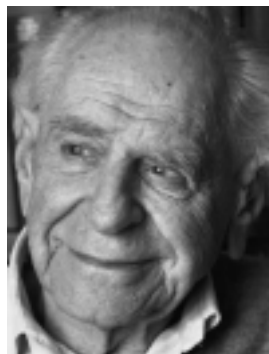
Quindi, data la congettura, se voglio provare che è vera seguo una strada; se voglio provare che è falsa ne seguo un'altra; se seguo una delle due strade e non arrivo a nulla, non posso concludere nulla, e ho perso tempo: dovrò provare l'altra strada.

Per non perdere tempo, dovrei sapere in anticipo se la congettura è vera o falsa, ma è proprio quello che ancora non so. Però, in realtà, potrei avere un'idea per cui è «plausibile» che la congettura sia vera (o falsa), e allora seguirò, per cominciare, la strada che mi sembra più promettente. Ma questo è un «pregiudizio». Ed è proprio così: occorre avere dei pregiudizi.

Sembra paradossale, ma nella ricerca di verità necessarie e universali, la strada passa per il «mi sembra», per i pregiudizi, per il *feeling* che io ho riguardo un certo problema. D'altronde è chiaro che, in ogni campo, non esiste una procedura rigorosa da seguire per fare scoperte. Il «prodotto finito» dei matematici è rigoroso, ma il «processo di produzione» non lo è in quanto contiene tutti gli elementi non rigorosi della ricerca per tentativi: si congettura in base a intuizioni e analogie, cercando di generalizzare risultati già noti in casi più semplici, si tenta di indovinare che forma potrebbe avere il risultato vero ricercando simmetrie, schemi semplici ed eleganti, per quanto possibile; si fanno i calcoli mediante passaggi non rigorosi, o passaggi che valgono solo sotto ipotesi restrittive, pur di arrivare in fondo al calcolo in fretta e vedere cosa si trova o cosa si potrebbe trovare. Quel che si ottiene così non è un risultato, ma può essere un'idea su un possibile risultato, può essere ciò che suggerisce di formulare una congettura in un certo modo, e suggerisce almeno in parte la strada da seguire per provare a dimostrarla.

Di solito, infatti, almeno un'idea di come fare a dimostrare una congettura è suggerita dallo stesso processo di pensiero che ha portato a formularla. Magari poi quell'idea si rivela ingenua o scorretta, ma è un primo punto d'attacco del problema. Le congetture si formulano con un procedimento che non ha il rigore della logica deduttiva, ma non per questo è folle o casuale.

A questo proposito, il filosofo della scienza Karl Popper, ne *La logica della scoperta scientifica* (1934), ha sostenuto invece una tesi di questo tipo: per capire il metodo scientifico si devono distinguere bene due piani, quello del come vengono le idee e quello del come si decide se le idee, comunque siano venute, sono vere o false. Il primo attiene alla psicologia della scoperta, il secondo alla logica della scoperta. Quindi Popper si concentra su quest'ultima affermando che la psicologia della scoperta sia irrilevante ai fini della comprensione della conoscenza scientifica. Questa tesi, che è stata assorbita acriticamente in modo abbastanza generalizzato, si ritrova citata in tanti discorsi «critici» sia sulla scienza che sulla matematica. A mio avviso un'impostazione di questo tipo rende impossibile capire la natura della ricerca scientifica o matematica, nella quale la «logica» della scoperta è invece proprio il lungo filo che parte dai pensieri meno rigorosi che generano congetture, e prosegue nel rigoroso lavoro dimostrativo. Quando un matematico scrive l'articolo in cui condensa le sue ricerche di mesi, effettivamente



Karl Popper
(1902-1994)

⁵K.F. Gauss, Lettera a Bolyai, 1808.

presenta i suoi risultati in modo abbastanza asettico, ripulendo il discorso da ogni accenno non rigoroso, ma quando fa una conferenza per i suoi colleghi, se è una persona comunicativa, cerca di raccontare almeno qualcosa di quell'*iceberg* sommerso di pensieri e congetture non rigorose che hanno generato quella ricerca e quel risultato. E chi ascolta spesso impara di più da questa parte dell'esposizione che da quella puramente tecnica. Ne era convinto già Gottfried Whilhem Leibniz (1646-1716): «Niente è più importante che vedere le sorgenti dell'invenzione che sono, a mio avviso, più interessanti delle invenzioni stesse.»



Ennio De Giorgi
(1928-1996)

La capacità di un ricercatore è almeno in una certa misura l'arte di fare delle buone congetture, il «fiuto» di indovinare la strada giusta prima di poter verificare che è giusta.

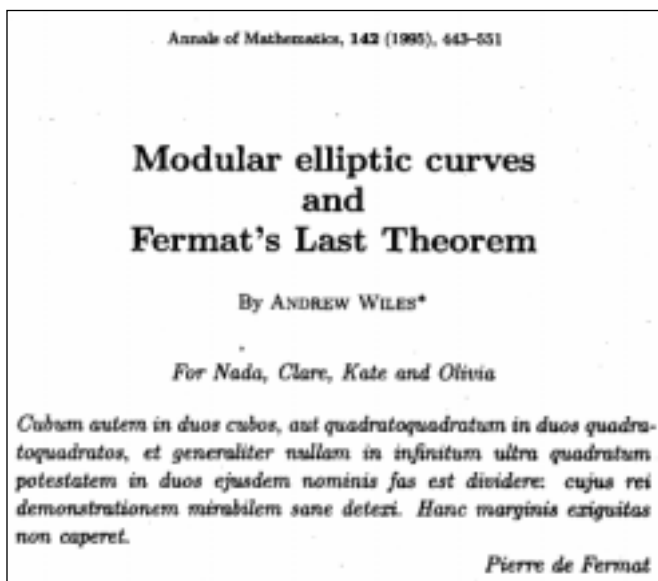
Ennio De Giorgi, grandissimo matematico italiano morto pochi anni fa, era noto per essere soprattutto un formidabile produttore di congetture, che i suoi collaboratori alla Normale di Pisa provavano essere esatte, quasi immancabilmente. Scriveva pochissime dimostrazioni, e senza molti dettagli, perché per lui gli enunciati corretti erano quasi «autoevidenti». Per quarant'anni le sue congetture sono state un punto di riferimento per molti ricercatori in Italia e nel mondo.

Saper insistere e saper sbagliare

La matematica non si esaurisce nell'intuizione di una buona congettura: è fatta anche del paziente e tenace lavoro di dimostrare ogni dettaglio. Il guaio è che a volte, mentre si stanno mettendo i puntini su

tutte le *i*, si scopre che qualcosa non funziona. Dopo aver sistemato novantanove dettagli ci si accorge che il centesimo non si riesce a sistemare. Sono momenti di brivido, in cui si teme di dover buttare via la fatica di settimane o mesi. Infatti, nessuno può dire «al 99% ho dimostrato che questo teorema è vero»: o è dimostrato, o non è dimostrato.

Andrew Wiles, matematico di Cambridge, nel 1993 annunciò di aver dimostrato la congettura più famosa degli ultimi trecento anni, il cosiddetto «ultimo teorema di Fermat»: *L'equazione $x^n + y^n = z^n$ non ammette soluzioni x, y, z intere positive, se n è un intero maggiore o uguale a 3.*



Dopo che era già diventato famoso per il risultato, spedì il lavoro alla più prestigiosa rivista di matematica, gli *Annals of Mathematics*. Solitamente un articolo mandato a una rivista, prima di essere accettato per la pubblicazione viene letto criticamente da un *referee* che dovrebbe controllarne ogni passaggio. In questo caso un'intera squadra di *referee* fu messa al lavoro e la dimostrazione fu fatta a pezzi. Quasi ogni giorno arrivava a Wiles qualche e-mail dei suoi *referee*, che gli segnalavano piccoli o grandi problemi da sistemare (punti da chiarire o da correggere), ed egli li sistemava tutti ribattendo colpo su colpo. A un certo punto gli fecero una critica che non riuscì a superare. Temette di aver perso tutto, e aveva dedicato sette anni della sua vita unicamente a quella dimostrazione, senza dire a nessuno fuorché a sua moglie cosa stesse facendo. Solo con l'aiuto di un altro matematico riuscì a dimostrare un risultato «di supporto», che tappava la falla esistente nel suo lavoro originale. Così lo storico volume degli *Annals* che contiene la dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat, pubblicato nel 1995 (due anni dopo il primo annuncio di Wiles) consiste di due articoli: uno di circa 110 pagine, a firma Andrew Wiles, e uno di una ventina di pagine, a firma Andrew Wiles e Richard Taylor, che contiene la dimostrazione di quel «Teorema di supporto» senza il quale sette anni di lavoro di Wiles non sarebbero bastati a dimostrare l'ultimo teorema di Fermat. Purtroppo nei due anni intercorsi tra l'annuncio del 1993 e la pubblicazione del 1995, Wiles aveva superato la soglia dei quarant'anni, che è il limite oltre il quale non viene assegnata la *Fields Medal*, il più prestigioso riconoscimento in campo matematico.

Non sempre le cose vanno «così bene»: talvolta il centesimo dettaglio non quadra perché la verità è che la congettura è sbagliata. Come si fa a capire qual è il momento di desistere? Fin quando si deve tenacemente cercare di risolvere il problema, e quando si deve cominciare a pensare che non lo si può risolvere perché la verità è un'altra?

Per fare ricerca bisogna avere dei pregiudizi e saper lavorare tenacemente per mostrare che sono veri; però bisogna tenere aperta anche la possibilità di essersi sbagliati ed essere pronti a cambiare strada: se la congettura è falsa, non diventerà vera a forza di insistere. Dove passa il confine tra il sano accanimento e l'ottusa ostinazione, o viceversa tra la pigrizia rinunciataria e la saggezza dell'ammettere il proprio errore? Sono sfide in cui si gioca la propria ragione tutta intera: non solo il rigore, non solo l'intuizione, non solo la capacità tecnica, non solo le sensazioni, ma tutte queste cose insieme e altre ancora.

Andrew Wiles
(1953-)



Matematica: invenzione o scoperta?

Nella fase in cui un matematico ricerca nuovi risultati, il suo modo di procedere ha qualcosa di empirico: si lascia orientare da esempi «concreti» e procede per tentativi ed errori. Dal punto di vista psicologico, è quasi inevitabile che finisca col considerare i propri risultati come la scoperta delle proprietà di certi oggetti reali, e non invece come un gioco di invenzione. E questo anche se, sul piano formale, sa che le proprietà degli oggetti matematici sono conseguenza degli assiomi che egli ha scelto di porre a base della teoria. Senza addentrarmi nel dibattito sulla natura degli oggetti matematici, discussione che negli ultimi duecento anni ha visto contrapporsi platonisti, logicisti, formalisti, intuizionisti, eccetera, mi interessa solo ribadire che la pratica della ricerca spinge a trattare gli enti matematici come oggetti «reali». E questo è certamente un altro ingrediente dell'interesse che «noi» proviamo per la matematica.

Secondo punto di sintesi: la matematica «dinamica»

- Nella ricerca matematica si vogliono scoprire enunciati significativi che siano veri. La dimostrazione stabilisce la verità del teorema ma, normalmente, non ne suggerisce l'enunciato: prima viene la congettura, poi la dimostrazione. In questa fase la ricerca matematica assume le caratteristiche di una ricerca empirica, per tentativi ed errori. Il fascino di questa attività di ricerca è di coinvolgere molte altre facoltà della ragione, oltre alla logica deduttiva.
- Inoltre, in questa ricerca, il mondo degli oggetti matematici assume il fascino di un mondo reale da esplorare. Un esempio impensato, una proprietà non immaginata, sono come un nuovo paesaggio che si apre alla vista quando si arriva a un passo di montagna.

Ho cercato di dare un'idea di cos'è e cosa non è la matematica, e indicare alcuni aspetti metodologici di questa disciplina, che a mio avviso ne costituiscono delle caratteristiche interessanti e affascinanti.

Accanto a questi, vi sono certamente anche aspetti di contenuto della matematica che la rendono affascinante per coloro che la praticano: «cose» che si studiano in matematica, e che per i matematici sono estremamente interessanti. ❖

Questo testo raccoglie la prima parte di una conferenza tenuta il 12 ottobre 2002 a Lizzola (BG) a un gruppo di studenti di Matematica.

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE

- B. Russell, *I principi della matematica*, Tascabili economici Newton, Roma 1989.
- C. Mangione (a cura di), *Frege: Logica e aritmetica*, Boringhieri, Torino 1977.
- E. Agazzi, *Introduzione ai problemi dell'assiomatica*, Vita e pensiero, Milano 1961.
- S. Singh, *L'ultimo Teorema di Fermat*, Rizzoli, Milano 1997.
- R. Feynman, *La legge fisica*, Boringhieri, Torino 1971.
- M. Emmer, *Ennio De Giorgi* (video-intervista), Pisa luglio 1996; testo integrale in *Lettera Pristem*, n 21, settembre-ottobre 1996.

CHE COS'È LA MATEMATICA (2)

OVVERO PERCHÉ CI PIACE LA MATEMATICA

di Marco Bramanti*

Perché a qualcuno piace la matematica? Accanto a ragioni legate ad aspetti metodologici, che l'autore ha affrontato nel numero precedente e che costituiscono elementi di fascino per molti, ve ne sono altre di contenuto. In generale, i matematici sono molto sensibili alla bellezza dei risultati. Ma quali sono i criteri estetici dei matematici, a questo riguardo? Che cosa può «piacere» in un teorema o in una teoria? L'autore illustra alcuni di questi aspetti, attraverso esempi di portata abbastanza generale.

Nel contributo pubblicato sul numero precedente di questa rivista, abbiamo osservato la matematica prima nella sua forma «statica» di insieme di conoscenze strutturate come sistema ipotetico deduttivo, e ne abbiamo descritto la natura di sapere necessario, stabile, universale, astratto; la dimostrazione come ricerca di nessi, spiegazione dei perché. Quindi abbiamo osservato la matematica nella sua forma «dinamica» di ricerca di nuovi risultati, riflettendo sul ruolo della congettura, e su certe caratteristiche della ricerca matematica che la fanno assomigliare a una ricerca empirica, sia pur in un universo di oggetti astratti. Fin qui si trattava di caratteristiche metodologiche.

Accanto a queste, ci sono naturalmente caratteristiche di contenuto, che rendono la matematica interessante per qualcuno. «Cose» che si trovano in matematica, e che a qualcuno piacciono. Di questo intendo occuparmi in questa seconda parte del mio intervento. In generale, i matematici sono molto sensibili alla bellezza dei risultati. Qualcuno potrà sorridere di questo, ma si può realmente affermare che uno dei criteri che maggiormente guida i matematici nel valutare un risultato, un argomento di ricerca, o un problema, è il criterio estetico. Proverò a esplicitare qualcuno di questi criteri di tipo estetico, che per loro natura non sono del tutto esplicitabili, né condivisi da tutti. Tuttavia, penso che le sottolineature che farò tocchino alcuni tasti a cui molti matematici sono sensibili.

Generalizzare. Le buone idee vanno lontano

In matematica si osserva che le buone idee non solo sopravvivono a lungo, ma «vanno lontano», ossia vengono incorporate nei successivi

*Associato di Analisi Matematica presso il Politecnico di Milano.

sviluppi che ne costituiscono una generalizzazione. Queste generalizzazioni non oscurano il valore dell'idea originale, ma anzi ne mostrano la fecondità. Il caso più elementare rimane una sorta di riferimento solido, rassicurante, nella costruzione più generale.

«L'arte di far matematica consiste nel trovare quel caso speciale che contiene tutti i germi della generalità».¹

Per esempio: gli spazi di Hilbert sono spazi di dimensione infinita, in cui vale un'opportuna versione del teorema di Pitagora. Così un'idea semplice e profonda, vecchia di duemila anni, è riletta in una forma più generale e astratta. La lunghezza di un vettore viene calcolata come radice quadrata della somma dei quadrati di infinite lunghezze, come se ragionassimo su ipotenusa e cateti di un triangolo rettangolo con infiniti cateti. E quando applichiamo questa versione più generale del teorema per calcolare la norma di una funzione mediante un'opportuna serie numerica, o - in una delle possibili interpretazioni fisiche di questo teorema - calcoliamo l'energia di un segnale come somma delle energie delle sue infinite armoniche, ci affascina la generalità a cui è stato spinto il buon vecchio teorema di Pitagora, e viceversa il pensiero di questo teorema «elementare» ci rassicura nell'uso della sua versione più astratta, ci fa sentire quest'ultima più familiare, più intuitiva, più nostra.

I matematici apprezzano esteticamente il fatto di ritrovare un teorema semplice, elementare, ben noto, ma importante, come caso particolare di (e al tempo stesso come ispirazione per) un risultato molto più generale, astratto e potente. È come essere in mezzo a un gruppo di persone sconosciute e che mettono un po' in soggezione, e incontrare tra loro un vecchio amico: ci sentiamo subito più a nostro agio.

Simmetria e semplicità

Introduciamo quest'idea citando alcuni teoremi.

Teorema 1

Tra tutti i solidi la cui superficie ha area assegnata, quello di volume massimo è la sfera.

Teorema 2

Tra tutte le sbarre di materiale fissato, la cui sezione ha area fissata (ma forma qualsiasi), quella che ha la massima rigidità alla torsione è quella di sezione circolare.

Teorema 3

Tra tutti i tamburi la cui membrana ha area fissata e materiale fissato (ma forma qualsiasi), quello che produce la nota più bassa è quello circolare.

¹D. Hilbert (1862-1943), in: N. Rose, *Mathematical Maxims and Minims*, Rome Press. Inc., Raleigh NC, 1988.

²Per esempio l'ultimo si potrebbe enunciare così: *Tra tutti i domini piani di area fissata e forma qualsiasi, quello per cui il primo autovalore dell'operatore di Laplace è minimo è il cerchio.*

³A proposito della «dimostrazione come spiegazione del perché», cfr.: M. Bramanti, *Che cos'è la matematica*, in *Emmeciquadro* n. 17, aprile 2003.

Gli ultimi due teoremi sembrano parlare più di fisica che di matematica, ma si possono formulare in termini puramente matematici.²

Questi teoremi hanno una struttura comune: rispondono a problemi variazionali, ossia: data una famiglia di infiniti oggetti matematici (insiemi, funzioni, eccetera), trovare quello che rende massima o minima una certa quantità. Nel *Teorema 1*, per esempio, si considera la famiglia di tutti i solidi la cui superficie ha area fissata. La cosa notevole è che questa famiglia è vastissima, a priori non ben delimitata (cos'è un solido? bisognerebbe precisarlo), e sicuramente tra i suoi elementi ve ne sono tanti «orribili», solidi dalle forme irregolari e stranissime, eppure, tra tutti questi oggetti, numerosi e complicati, quello che risolve il problema in questione è il più semplice e il più simmetrico di tutti: la sfera. Lo stesso fenomeno si presenta negli altri due teoremi.

Questo piace molto ai matematici: scoprire che la soluzione di un problema è un oggetto semplice e simmetrico, a dispetto del fatto che a priori lo cercassimo in mezzo a tantissimi altri oggetti irregolari. Questa semplicità, regolarità, simmetria, che emerge a posteriori, da ciò che a priori è generico (e quindi potenzialmente irregolare e complicato), è qualcosa che i matematici trovano molto elegante. Credo che qualunque matematico sottoscriverebbe l'affermazione: «il *Teorema 1* è un enunciato semplice ed elegante».

Attenzione: «enunciato semplice» non significa «teorema semplice da dimostrare»! Questi risultati possono essere molto difficili da dimostrare. Il punto è che per dimostrare che la sfera ha volume massimo tra i solidi di ugual superficie, devo confrontare il volume della sfera col volume del generico solido di ugual superficie, e questo generico solido è potenzialmente un oggetto complicato, perciò difficile da trattare. La dimostrazione dunque è difficile, richiede delle buone idee. D'altronde, forse ci farà capire meglio perché le cose stanno proprio così.³

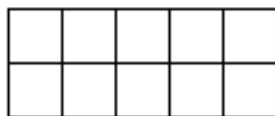
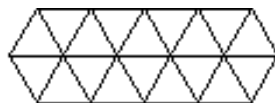
Dare un volto concreto a ciò che è astratto: i teoremi di classificazione

Le piastrellature regolari del piano

Una piastrellatura del piano è un rivestimento del piano mediante «piastrelle» (figure geometriche), a condizione che: le piastrelle siano tutte uguali tra loro; le piastrelle ricoprano tutto il piano; le piastrelle combacino tra loro senza sovrapporsi. Inoltre, si dice piastrellatura regolare una piastrellatura ottenuta prendendo come piastrella-tipo un poligono regolare.

Teorema

Sono possibili solo 3 tipi di piastrellature regolari del piano: mediante triangoli equilateri, mediante quadrati, mediante esagoni regolari.



Invece, le piastrelature non regolari del piano, sono infinite.

Maurits C. Escher (1898-1972) si è divertito a inventarne alcune artistiche: ecco a lato una piastrellatura del piano per mezzo di ... farfalle.



I poliedri regolari

Definizione. Diciamo che un poliedro è regolare se: tutte le sue facce sono uguali tra loro; ogni faccia è un poligono regolare; in ogni vertice si forma lo stesso angolo solido.

Teorema

I poliedri regolari sono solo 5 (i cosiddetti «solidi platonici»):
 tetraedro (le facce sono 4 triangoli equilateri)
 cubo (le facce sono 6 quadrati)
 ottaedro (le facce sono 8 triangoli equilateri)
 dodecaedro (le facce sono 12 pentagoni regolari)
 icosaedro (le facce sono 20 triangoli equilateri).



Questi due teoremi geometrici sono esempi di teoremi di classificazione. La geometria e l'algebra sono piene di teoremi di classificazione. Si dà una definizione astratta (per esempio «poliedro regolare») e poi ci si chiede: chi sono in concreto gli oggetti che soddisfano questa definizione? Si scopre che sono certi tipi e non di più. La cosa importante del teorema non è tanto l'affermare che quei 5 solidi hanno le proprietà in questione (questa è una verifica), quanto l'affermare che non ce ne sono altri.

Quando un matematico dice «e non ce ne sono altri» fa sul serio. Ha escluso la possibilità logica che ce ne siano altri, e a nessuno capiterà mai di incontrarne altri. L'argomento è chiuso, per così dire. Dunque quella nozione astratta è perfettamente compresa: ora vediamo «chi sono» i poliedri regolari. E questo ci piace molto. Questo è il fascino dei teoremi di classificazione.

Apriamo una parentesi sui solidi platonici. Come suggerisce il nome, queste cinque figure erano già note nell'antichità, e apprezzate per la loro estrema simmetria. Nel millecinquecento Keplero fu guidato nelle sue riflessioni sui moti dei pianeti intorno al sole, che lo avrebbero portato a formulare le sue famose tre leggi, dalla seguente idea, falsa: che le orbite dei sei pianeti del sistema solare (allora se ne conoscevano solo sei) fossero poste a certe distanze e non altre, perché tra le sei sfere si inscrivevano perfettamente i cinque solidi platonici. Il fatto dimostra l'estrema ammirazione che questi solidi destavano in un uomo come Keplero. L'elemento estetico è spesso presente nella storia delle idee scientifiche.

Dare un volto concreto a ciò che è astratto: i teoremi di rappresentazione

Per spiegare cosa si intende per teoremi di rappresentazione, introduciamo il seguente esempio geometrico, abbastanza elementare. Consideriamo l'insieme V dei vettori dello spazio ordinario (tridimensionale), e diamo la seguente definizione astratta: chiameremo funzionale lineare su V una legge L che associa a ogni vettore un numero reale, e soddisfa inoltre la proprietà di linearità:

$$L(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha L(\mathbf{u}) + \beta L(\mathbf{v})$$

per ogni coppia di vettori \mathbf{u} , \mathbf{v} e di numeri reali α , β .

Chiediamoci quali possono essere degli esempi concreti di funzionali lineari su V . Un modo di costruirne è il seguente. Consideriamo un vettore \mathbf{u} , fissato una volta per tutte; dato ora un qualsiasi altro vettore \mathbf{v} , consideriamo il prodotto scalare $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Com'è noto, il prodotto scalare di due vettori è un numero, e precisamente è il prodotto delle lunghezze dei due vettori per il coseno dell'angolo da essi formato. Se ora, al variare di \mathbf{v} in tutti i modi nell'insieme V dei vettori, consideriamo la legge che a \mathbf{v} associa il numero $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, otteniamo proprio un funzionale lineare su V , com'è facile verificare in base alle proprietà del prodotto scalare.

Questo è solo un esempio; chiediamoci ora: esistono funzionali lineari su V di altri tipi, definiti in modi diversi, che non hanno niente a che fare col prodotto scalare? Il buon senso e la prudenza sug-

gerirebbero di rispondere: perché no? Dopo tutto, la definizione di funzionale lineare è molto astratta, non sembra strettamente legata, di per sé, a quella di prodotto scalare. Sorprendentemente, invece, si può dimostrare il seguente teorema.

Teorema di rappresentazione

Ogni funzionale lineare su V si può rappresentare come prodotto scalare per un vettore fissato. Precisamente: per ogni funzionale lineare L esiste un vettore $\mathbf{u} \in V$ che rappresenta L nel senso che

$$L(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \text{ per ogni } \mathbf{v} \in V.$$

Il teorema precedente è l'esempio elementare di una vasta classe di teoremi di analisi funzionale (una branca dell'analisi matematica) che prendono il nome di teoremi di rappresentazione. In queste versioni più generali, al posto dello spazio V dei vettori tridimensionali si considera un opportuno spazio di funzioni, oppure uno spazio «astratto», come gli spazi di Hilbert, cui ho accennato in precedenza; si dà poi una definizione astratta di funzionale lineare e continuo sullo spazio in questione. In questo contesto, un teorema di rappresentazione dice che i funzionali lineari continui su un certo spazio sono «tutti e soli» quelli che si rappresentano in un certo modo «concreto».

Di nuovo, lo spirito del teorema è dare un volto concreto a un concetto che a priori è definito in termini di proprietà astratte. Non solo si possono costruire concretamente funzionali lineari continui con un certo procedimento, ma vale il viceversa: per il fatto solo di obbedire alla definizione astratta di funzionale lineare continuo, quell'oggetto deve necessariamente potersi costruire concretamente in un certo modo.

Anche qui come per i teoremi di classificazione, il frutto del teorema è che la nozione astratta di funzionale lineare continuo su un certo spazio viene perfettamente compresa e dominata: ora vediamo «chi sono» i funzionali lineari continui su tale spazio. E questo ci piace.

La mia teoria è meglio di me: i teoremi di esistenza e unicità

Un altro cavallo di battaglia dei matematici è dato dai teoremi di esistenza, i teoremi di unicità, e, colpo grosso quando riescono, i teoremi di esistenza e unicità. Lo schema logico generale è il seguente. Abbiamo un problema, che contiene dei dati e delle incognite. Incognite e dati possono essere oggetti matematici di vario tipo, a seconda del problema di cui si parla: numeri, vettori, funzioni, eccetera.

In realtà, spesso il matematico non affronta un problema singolo, ma piuttosto è interessato ad affermare qualcosa di generale su un'intera classe di problemi. Idealmente, la nostra classe di problemi si può vedere come una sorta di «scatola nera» con un ingresso e un'uscita: all'in-

gresso si inseriscono i dati, e la scatola nera restituisce in uscita la soluzione (ossia il valore delle incognite).

I seguenti esempi possono rendere più concreto il discorso, ma non sono essenziali per la comprensione dell'idea di fondo che qui mi interessa comunicare.

Esempio 1, dall'algebra lineare

Il sistema di 3 equazioni lineari in 3 incognite x, y, z :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

I coefficienti a_{ij} si suppongono assegnati una volta per tutti; il dato del problema è allora il vettore dei termini noti delle 3 equazioni (b_1, b_2, b_3) ; l'incognita è il vettore dei 3 valori (x, y, z) che, sostituiti al posto delle variabili, soddisfano contemporaneamente le tre equazioni.

Esempio 2, dall'analisi matematica

Il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

La funzione $f(x, y)$ si suppone assegnata una volta per tutte; il dato ora è il numero y_0 (detto «condizione iniziale»), l'incognita è la funzione $y(x)$ che soddisfa sia l'equazione differenziale $y'(x) = f(x, y)$ che la condizione $y(0) = y_0$.

Per dare contorni precisi al problema, bisogna precisare in quale insieme B si assegna il dato, e in quale insieme A si cerca la soluzione x . Un teorema di esistenza dice: comunque si assegni il dato b nell'insieme B , il problema ha «almeno una» soluzione x in A . (Però potrebbe averne più di una).

Un teorema di unicità dice: comunque si assegni il dato b nell'insieme B , il problema ha «non più di una» soluzione x in A . (Però potrebbe non averne nessuna).

Un teorema di esistenza e unicità, ovviamente, dice: comunque si assegni il dato b nell'insieme B , il problema ha «una e una sola» soluzione x in A .

Inutile dire che i matematici, soprattutto i «teorici», vanno matti per i teoremi di esistenza e unicità; e questo spesso suscita l'ilarità degli «applicati» (per esempio gli ingegneri) che inventano barzellette sui matematici, a riguardo. Infatti dicono: cosa importa sapere in astratto che un problema ha soluzione? La cosa

interessante è saper risolvere effettivamente il problema! Il teorema di esistenza insegna come trovare la soluzione? La risposta è che spesso il teorema non lo dice proprio. Si dice per questo che è un teorema «non costruttivo». Negli esempi citati: per i sistemi lineari (*Esempio 1*), si dimostra un teorema di esistenza e unicità, il Teorema di Cramer, che dice come trovare la soluzione, ossia è costruttivo; per il problema di Cauchy per le equazioni differenziali ordinarie (*Esempio 2*), invece, si dimostra un teorema di esistenza e unicità non costruttivo.

Più in generale, l'analisi matematica è piena di teoremi non costruttivi, perché tutta l'analisi si fonda sulle proprietà dei numeri reali, e la proprietà caratteristica dell'insieme dei numeri reali è un assioma di natura non costruttiva, il cosiddetto assioma di continuità (o assioma dell'estremo superiore), che dice: *Sotto le tali ipotesi, esiste un numero reale con la tal proprietà*.⁴ E siccome il fondamento di tutto è in questo assioma, e questo assioma dice che un certo numero esiste, ma non dice come trovarlo, è chiaro che tutti i teoremi che si fondano su questo assioma diranno che qualcosa esiste senza dirci come fare a trovarlo. Dunque, il fatto che in analisi ci siano teoremi di esistenza non costruttivi non è un incidente di percorso, ma è nella natura delle cose. Allora, cosa ce ne facciamo di questi teoremi di esistenza e unicità? Anzitutto, non è vero che il solo sapere che la soluzione esiste non è di alcun aiuto a cercarla: se non trovo più le chiavi di casa, ma sono certo che le ho lasciate in una certa stanza (teorema di esistenza), è più facile per me cercarle che se non avessi nessuna idea di dove le ho lasciate; il teorema di esistenza dice dove andare a mettere le mani, e dà una determinazione nella ricerca che altrimenti non avrei. In secondo luogo, ci sono teoremi di esistenza che pur non essendo costruttivi in senso stretto (ossia non insegnando a trovare la soluzione esatta), garantiscono l'esistenza di tale soluzione e inoltre indicano un procedimento iterativo con cui trovare una soluzione approssimata, con la precisione desiderata.⁵ Possiamo parlare in tal caso di teoremi «operativamente costruttivi».

I teoremi di unicità poi sono utili per un altro motivo: a volte mettersi a cercare una soluzione totalmente generica può essere scoraggiante; con un po' di ottimismo e di fiuto, però, possiamo dire: magari c'è una soluzione di questo tipo particolare; ci mettiamo allora a cercare una soluzione di quel tipo particolare, abbastanza semplice, e, se c'è, sarà più facile trovarla che se ne avessimo cercata una totalmente generica. Quando poi l'abbiamo trovata, se sappiamo che vale un teorema di unicità, siamo a posto: abbiamo trovato una soluzione, ma non ce n'è più di una, quindi abbiamo trovato «la» soluzione. In altre parole, il nostro esserci indirizzati su una strada particolare ci ha semplificato la vita e non ci ha fatto perdere altre soluzioni (più complicate), per il semplice fatto che se ne abbiamo trovata una, sappiamo che non ne possono esistere altre.

⁴Precisamente, l'assioma di continuità afferma: *Dato un insieme di numeri reali, non vuoto e superiormente limitato, esiste un numero reale che ne è l'estremo superiore*. Per maggiori dettagli e per una spiegazione dei termini si veda qualsiasi testo universitario di Analisi matematica.

⁵In generale questo significa che maggiore è la precisione che si desidera ottenere sulla soluzione, maggiore deve essere il numero di passi del procedimento iterativo di calcolo.

A parte queste considerazioni di utilità, indubbiamente teoremi di questo tipo esercitano un certo fascino su noi matematici. Ci dicono che la nostra formulazione del problema è adeguata, che gli insiemi A e B in cui abbiamo deciso di mettere i dati e cercare le soluzioni sono stati scelti bene. Spesso infatti la scelta di questi insiemi non è ovvia. Per esempio: si parte da un problema fisico, che viene modellizzato con un'opportuna equazione differenziale; ciò che è oggettivo, insito nel problema, è quale equazione scrivere; ma quali siano gli spazi di funzioni A , B in cui assegnare dati e cercare soluzioni, non è altrettanto facilmente deducibile dal significato del problema, è piuttosto una questione matematica.

I teoremi di esistenza e unicità ci dicono quindi che questo modello matematico è ben formulato, che abbiamo una teoria-quadro coerente in cui lavorare, che può essere il contesto appropriato per porsi altri problemi; ci dicono che, anche in quei casi in cui noi non siamo abbastanza bravi da trovare «con le mani» la soluzione, la soluzione c'è. In un certo senso, la nostra teoria è meglio di noi, ha una sua consistenza, eleganza, che va oltre la nostra capacità tecnica di trovare ingegnosamente la soluzione particolare per certi dati particolari. E questo è un altro genere di cose che ai matematici piace scoprire.

Avvertenza finale. Non è tutto così semplice

Ho provato a illustrare alcuni degli elementi che un matematico apprezza in un teorema o in una teoria. Essi coinvolgono alcune parole-chiave: semplicità, simmetria, generalità, desiderio di dare un volto concreto e familiare ai concetti astratti, fino a «vederli»; desiderio di costruire una teoria che sia come un'opera d'arte, bella da ammirare.

Purtroppo la matematica, quella che quotidianamente si studia o si incontra nella ricerca, non è fatta solo di enunciati semplici ed eleganti, ma anche di enunciati terribilmente complicati, che sembrano puramente tecnici, e opachi a qualsiasi luce dell'intuizione. Questi enunciati sono come il tunnel in cui occorre passare per raggiungere la meta, il paesaggio che si vuole ammirare. Attraversiamo questo tunnel con la sola luce della logica deduttiva, un passo dopo l'altro, con calma, per non inciampare. È il sacrificio da fare per arrivare dove ci interessa, dove si vedono quegli elementi di bellezza di cui ho parlato. Ci sono momenti in cui sembra di essere sempre nel tunnel, ma occorre anche imparare a guardare, per vedere il panorama. Agli studenti che affrontano lo studio della matematica universitaria, per esempio, direi: cercate dei docenti che vi insegnino ad ammirare il panorama della matematica, e non solo ad attraversare i tunnel. ❖